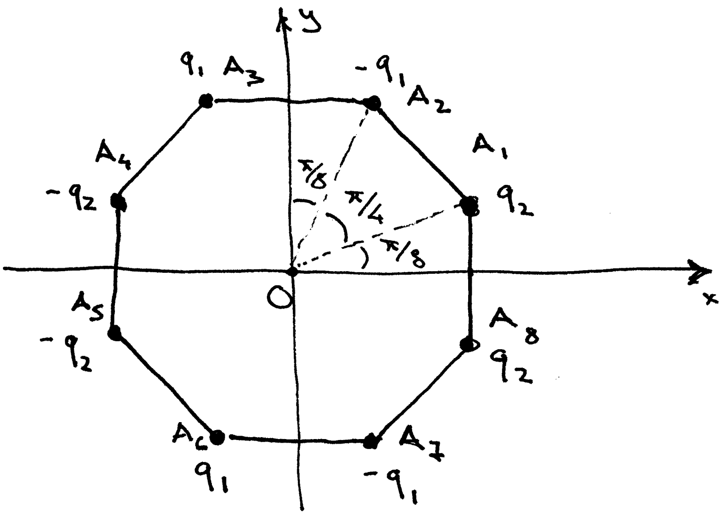
Electrostatique - examen 2007 session 2
(correction)

Partie I



1). Plans de symétrie

- plan xy
- plan xz (passant par l'axe Ox et orthogonal au plan xy.

Plans d'antisymétrie

- plan yz

Tous ces plans passent par O. Implications:

- $\vec{E}(O) \in$ plan xy
- $\vec{E}(O) \in$ plan xz

$\Rightarrow \vec{E}(O) \parallel$ l'axe Ox

- $\vec{E}(O) \perp$ plan yz $\Rightarrow \vec{E}(O) \parallel$ l'axe Ox (même conclusion)

Donc $\vec{E}(O) \parallel Ox$.

2). $$\vec{E}(O) = \vec{E}_{q_2 \text{ en } A_1}(O) + \vec{E}_{-q_1 \text{ en } A_2}(O) + \vec{E}_{q_1 \text{ en } A_3}(O) + \vec{E}_{-q_2 \text{ en } A_4}(O) +$$

$$+ \vec{E}_{-q_2 \text{ en } A_5}(O) + \vec{E}_{q_1 \text{ en } A_6}(O) + \vec{E}_{-q_1 \text{ en } A_7}(O) + \vec{E}_{q_2 \text{ en } A_8}(O) =$$

$$= k\frac{q_2}{|\vec{A_1O}|^3}\vec{A_1O} + \frac{k(-q_1)}{|\vec{A_2O}|^3}\vec{A_2O} + \frac{k\,q_1}{|\vec{A_3O}|^3}\vec{A_3O} + \frac{k(-q_2)}{|\vec{A_4O}|^3}\vec{A_4O} +$$

$$+ \frac{k(-q_2)}{|\vec{A_5O}|^3}\vec{A_5O} + k\frac{q_1}{|\vec{A_6O}|^3}\vec{A_6O} + \frac{k(-q_1)}{|\vec{A_7O}|^3}\vec{A_7O} + \frac{k\,q_2}{|\vec{A_8O}|^3}\vec{A_8O} =$$

$$= \left| \text{car } \underbrace{|\vec{A_1O}|}_{a} = |\vec{A_2O}| = \dots = |\vec{A_8O}| \right| =$$

$$= \frac{k}{a^3}\Big[q_2\vec{A_1O} - q_1\vec{A_2O} + q_1\vec{A_3O} - q_2\vec{A_4O} - q_2\vec{A_5O} + q_1\vec{A_6O}$$
$$- q_1\vec{A_7O} + q_2\vec{A_8O} \Big] =$$

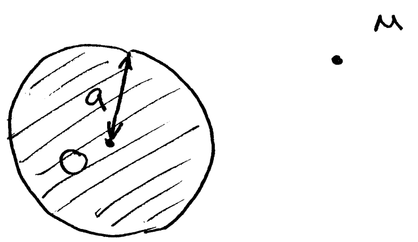
$$= \frac{k}{a^3}\left[q_2 \left(\underbrace{\vec{A_1O} - \vec{A_4O}}_{=\vec{A_1A_4}} + \underbrace{\vec{A_8O} - \vec{A_5O}}_{=\vec{A_8A_5}}\right) + q_1\left(\underbrace{-\vec{A_2O}+\vec{A_3O}}_{=\vec{A_3A_2}} + \underbrace{\vec{A_6O}-\vec{A_7O}}_{=\vec{A_6A_7}}\right)\right] =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \text{car } \vec{A_1A_4} = -2a \sin 3\pi/8\, \vec{e}_x, & \vec{A_3A_2} = 2a \sin \pi/8\, \vec{e}_x \\ \vec{A_8A_5} = -2a \sin 3\pi/8\, \vec{e}_x, & \vec{A_6A_7} = 2a \sin \pi/8\, \vec{e}_x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{k}{a^3}\left[q_2 (-4a \sin 3\pi/8\, \vec{e}_x) + q_1 (4a \sin \pi/8\, \vec{e}_x)\right] =$$

$$= \frac{4k}{a^2}(q_1 \sin \pi/8 - q_2 \sin 3\pi/8)\vec{e}_x = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 a^2}(q_1 \sin \pi/8 - q_2 \sin 3\pi/8)\vec{e}_x.$$

Partie II



1). a). Plans de symétrie : tous les plans passant par O.

Les plans de symétrie passant par M : tous les plans contenant la droite OM

$\Downarrow$

$\vec{E}(M) \parallel \vec{OM}$ (direction radiale $\vec{E} \parallel \vec{e}_r$)

b). Nous avons une symétrie de rotations autour de O

$\Downarrow$

les composantes de $\vec{E}$ ne dépendent que de r, ainsi que le module $|\vec{E}|$.

c). L'intersection de tous les plans de symétrie passant par O = point O $\Rightarrow \vec{E}(O) = \vec{0}$.

2). a) Surface de Gauss : une sphère de même centre et de rayon $r = |\vec{OM}|$. En tout point de cette sphère la direction de $\vec{E}$ coïncide avec celle de la normale à la surface de Gauss et en plus $|\vec{E}|$ est le même

(1) donc $\Phi = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{f(r)}_{|\vec{E}|} \cdot \underbrace{4\pi r^2}_{\text{aire de la sphère}}$.

D'après le thm de Gauss: $\Phi = \dfrac{Q_{\text{int. de } S}}{\varepsilon_0}$. On a

(2) $$Q_{\text{int. de } S} = \begin{cases} \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r<a, \\ \rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 & \text{si } r>a. \end{cases}$$

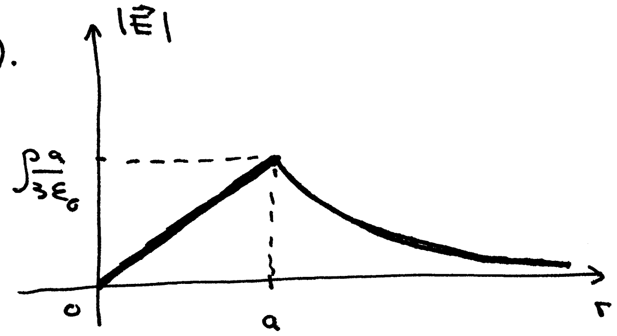
En comparant (1) et (2), on trouve

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & \text{si } r<a, \\ \dfrac{\rho a^3}{3r^2\varepsilon_0} & \text{si } r>a. \end{cases}$$

b). Oui, le champ est continu, car

$$\lim_{r\to a-0} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0} = \lim_{r\to a+0} f(r).$$

c).



3). Mêmes symétries, même expression pour le flux: $\Phi = f(r)\cdot 4\pi r^2$.
Ce qui est modifiée c'est l'expression pour $Q_{\text{int. de } S}$:

$$Q_{\text{int. de } S} = \begin{cases} \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r<a \\ \rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 & \text{si } a<r<b \\ \rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 + \sigma\cdot 4\pi b^2 & \text{si } r>b \end{cases}$$

Donc a). le champ est modifié dans la région $r \geq b$

b). $$|\vec{E}| = f(r) = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 + \sigma\cdot 4\pi b^2}{4\pi r^2\,\varepsilon_0} = \left(\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma b^2}{\varepsilon_0}\right)\Big/ r^2$$

pour $r>b$.